

Académie :

Session :

Examen ou Concours

Série* :

Spécialité/option* :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

NOM : LAU

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : Martin

N° du candidat

Né(e) le :

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

Examen ou concours : Olympiades Nationales Série* : 2021

Spécialité/option* :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les et placez les intercalaires dans le bon sens.

Note :

Appréciation du correcteur* :

20

*Uniquement s'il s'agit d'un examen.

Olympiades nationales de mathématiques

Exercice 1

1/ Le nombre maximal de cartes que l'on peut avoir est 3^3 , c'est à dire 27 cartes.

Tous les cartes possibles:

147 157 167 247 257 267 347 357 367

148 158 168 248 258 268 348 358 368

149 159 169 249 259 269 349 359 369

2/ a/ Soient les cartes M, N et P. On note respectivement leurs nombres $a^m b^m c^m$, $a^n b^n c^n$ et $a^p b^p c^p$.

On cherche à montrer que les chiffres de même position sont soit tous différents, soit tous identiques. Les chiffres peuvent prendre 3 valeurs différentes; donc on peut trois valeurs différentes sur une position. On peut aussi avoir trois cartes ayant une valeur de a, b ou c commune, si et seulement si au moins un chiffre de ces cartes est différent, puisqu'on ne peut pas avoir plusieurs cartes ayant le même nombre.

N°

1/8

b/ On trouve le point [369] sur la droite formée par [147] et [258].

On trouve le point [357] sur la droite formée par les points [159] et [258].

c/ Sachant que M, N, et P soient alignés, et que P appartienne à la droite (MN), les valeurs a, b et c de ces trois cartes sont soit tous différentes, soit tous identiques. Or d'après 21a) qu'il existe une troisième carte appartenant à cette droite. Ici, il s'agit du point M. La carte M appartient donc à la droite (NP).

d/ Supposons qu'il existe une quatrième carte Q différente de M, N et P appartenant à la droite (MN). Or, on sait que 3 cartes soient alignés, ils doivent avoir trois chiffres identiques ou différents. Dans le cas où ces 4 cartes possèdent 2 nombres en commun, cette situation sera impossible puisqu'il y aura deux cartes identiques. Dans le cas où il existe 1 nombre en commun, la carte Q ne peut pas exister puisqu'il aura au moins 2 nombres en commun avec une autre carte. Si aucun nombre est en commun, il n'y a pas de cartes possibles pour Q puisque tous les valeurs possibles sont déjà prises. On conclut qu'on ne peut pas avoir une telle carte Q sur la droite (MNP).

e/ Il existe 9 droites où les cartes MNP ont deux chiffres en commun, puisque pour 2 positions peuvent prendre 3 valeurs, donc 3^2 droites).

Il existe 27 droites où les cartes MNP ont un chiffre en commun, puisque: le chiffre en commun peut prendre 3 places, les deux autres chiffres prennent 3 valeurs différents chacun, et prennent des places différents aussi. D'où $3^3 = 27$.

Il existe 81 droites où les cartes MNP n'ont aucun chiffre en commun, puisque chaque chiffre peut prendre 3 positions, 3 valeurs. On met cela au carré puisque aucune carte est en commun, donc $(3^2)^2 = 3^4 = 81$.
D'où $3^2 + 3^3 + 3^4 = 117$.

3/a/ La carte d'intersection de ces deux droites est [147].

b/ Cette carte appartient à 39 droites. Dans le cas où 2 chiffres identiques, il y a 3¹ différents droites. Dans le cas où 1 chiffre est identique, il y a 3² possibilités, et dans le cas où tous les chiffres sont différents, il y a 3³ droites. D'où $3^1 + 3^2 + 3^3 = 39$.

(On pourra aussi s'y arriver en divisant 117 par 3, puisque on connaît déjà une carte).

c/ ([147][148][149]) et ([247][248][249]).

4/a/

Exercice 21/ On regarde le 3^{ème} tableau :

3	4	9
8	5	2
1	6	7

d'où

$$A+B+D+E = 3+4+8+5 = 20$$

$$B+C+E+F = 4+9+2+5 = 20$$

$$D+E+G+H = 8+5+1+6 = 20$$

$$E+F+H+I = 5+2+6+7 = 20$$

$$B+D+F+H = 4+8+6+2 = 20$$

Les sommes sont tous égaux, donc ce tableau est donc un carré magique.

Regardons le 2^{ème} tableau :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$$d'où A+B+D+E = 4+9+3+5 = 21$$

$$B+C+E+F = 9+2+5+7 = 23$$

$$Or A+B+D+E \neq B+C+E+F \Rightarrow 21 \neq 23.$$

donc le deuxième tableau n'est pas un carré magique.

Regardons le premier tableau :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$d'où A+B+D+E = 1+2+4+5 = 12$$

$$B+C+E+F = 2+3+6+5 = 17$$

$$Or A+B+D+E \neq B+C+E+F \Rightarrow 12 \neq 17.$$

donc le premier tableau n'est pas un carré magique.

→ Seulement le 3^{ème} est un carré magique.

2/a/ On sait que les lettres de ce carré prennent tous les valeurs différents allant de 1 à 9. donc :

$$A+B+C+D+E+F+G+H+I = \sum_{i=1}^9 i = 45.$$

$$b/ On a : S = A+B+D+E = B+C+E+F = D+E+G+H = E+F+H+I$$

$$S = B+D+F+H$$

$$d'où ① S = 45 - C - F - G - H - I$$

$$② S = 45 - A - D - G - H - I$$

$$③ S = 45 - A - B - C - F - I$$

$$④ S = 45 - A - B - C - D - G$$

$$⑤ S = 45 - A - C - E - G - I$$

$$donc S = 15 + E.$$

Académie :

Session :

Examen ou Concours

Série* :

Spécialité/option* :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

NOM : LAU

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : Martin

N° du candidat

Né(e) le :

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

Examen ou concours :

Série* :

Spécialité/option* :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les et placez les intercalaires dans le bon sens.

Note :

20

Appréciation du correcteur* :

*Uniquement s'il s'agit d'un examen.

c/

6	7	5
2	1	3
9	4	8

 $S = 16$

d/

1	6	2
8	9	7
4	3	5

 $S = 24$

3/a) On sait que $A+B+D+E = E+F+H+I = S$. D'où $S = 15 + E$ donc les sommes $A+B+D = F+H+I = 15$. Si S est un nombre impair, alors E est forcément un nombre pair. Car la somme d'un nombre impair avec un nombre pair donne un nombre impair.

3/b) Comme il y a 6 nombres pair, 6 cases sont donc occupées par des nombres pairs.

c) Pour avoir une somme de chiffres impaires, on doit avoir un nombre impair. Les configurations proposées donnent une somme S où il y a toujours un nombre impair de nombres pair.

d/

N°

5/8

c/

4	8	6
3	2	1
7	5	9

 $S = 17$

4/a/

3	4	9
8	5	2
1	6	7

 $S = 20$

b/ On sait que $S = 15 + E \Rightarrow 20 = 15 + E$ donc $E = 5$.
On cherche les nombres B, D, F, H tel que leur somme vaut 20. Puisqu'on veut aussi placer au moins un nombre pair dans un sommet de ce carré, il faut que deux des lettres B, D, F, H soient impaires puisqu'il faut un nombre pair de nombres impairs pour créer une somme de 20.

B, D, F, H ne peuvent pas être tous des nombres impairs, puisqu'après la somme sera forcément impaire. (Par exemple $A+B+D+E$ où B, D, E sont impairs ne peuvent pas faire une somme de 20).

Il faudra donc une configuration.

où un croix représente un nombre impair et un cercle représente un nombre pair.

X		X
O	O	O
X		X

Après avoir testé tous les configurations possibles, il est impossible d'avoir au moins un nombre pair au sommet de ce carré.

0 8 4
7 5 3
6 2 10
carré incorrecte

8 6
9 5 1
2 X
carré impossible

Il n'existe pas de carré magique dont au moins un nombre pair occupe un sommet du carré.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS LA PARTIE BARRÉE

N°
768

NE RIEN ÉCRIRE

DANS LA PARTIE BARRÉE

Handwriting practice grid with dotted lines.